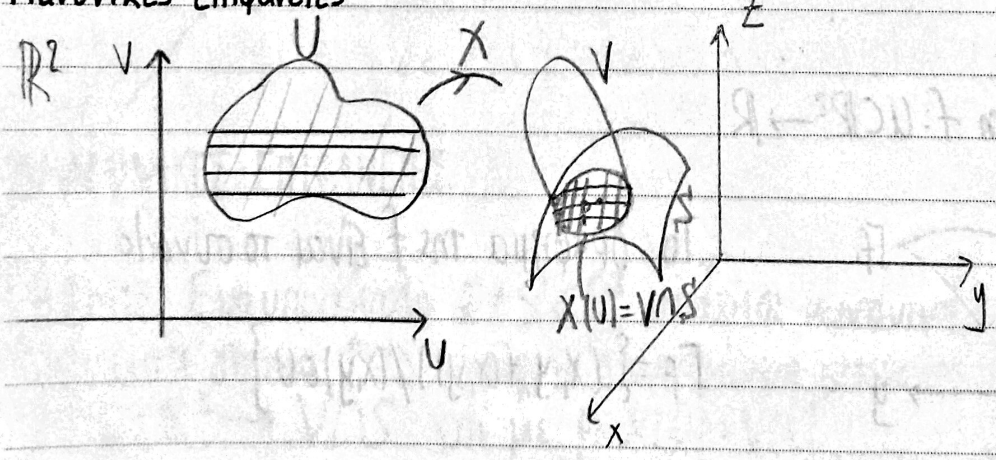
Μάθημα 1ο₀

11/11/16

Κανονικές επιφάνειες



Το σύνολο S καλείται κανονική επιφάνεια ανν για κάθε σημείο $p \in S$, υπάρχει λεία απεικόνιση $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ επί, όπου V είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, η οποία πληροί τα ακόλουθα:

i) Η $X: U \to V \cap S$ είναι ομοιομορφισμός

ii) $\forall q \in U$ το διαφορικό $dX_q : T_q\mathbb{R}^2 \to T_{X_q}\mathbb{R}^3$ είναι 1-1 $\Leftrightarrow X_u \times X_v \neq 0$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

i) $V \cap S$ είναι ανοιχτό στον S

ii) Κάθε ανοιχτό υποσύνολο του S είναι κανονική επιφάνεια

iii) Αν S κανονική επιφάνεια και $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$, τότε το $\tilde{S} = T(S)$ είναι κανονική επιφάνεια.

Το (iii) σημαίνει ότι μπορώ να μιλώ για γεωμετρικώς ισότιμες κανονικές επιφάνειες

ΕΡΩΤΗΜΑ: Πότε δύο κανονικές επιφάνειες είναι γεωμετρικώς ισότιμες;

$T = T_v \circ A \quad , \quad A \in O(3)$.

$\tilde{X} = T \circ X : U \to \tilde{V} \cap \tilde{S} \quad , \tilde{V} = T(V)$

$d\tilde{X}_q = dT_{X(q)} \circ dX_q = d_{X(q)}A \circ dX_q = A \circ dX_q \quad$ 1-1.

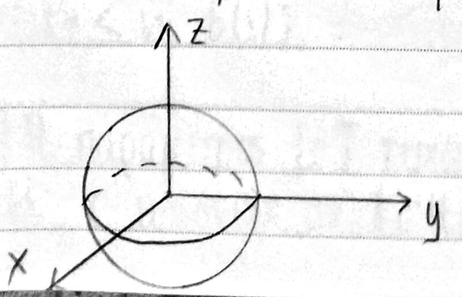
Επιφάνειες Γραφήματα

$f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ λείο. Το γράφημα: $\Gamma_f = \{(x, y, f(x,y)) / (x,y) \in U\}$ είναι κανονική επιφάνεια που καλύπτεται από ένα μόνο σύστημα συντεταγμένων

$X : U \to \Gamma_f \quad , \quad X(u,v) = (u, v, f(u,v))$

$V = \mathbb{R}^3$

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα: $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.



$z > 0 , \ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Θεωρώ την απεικόνιση $X_1 : U \to S^2 \cap V_1$

$X_1(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$

$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\}$

$U_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u^2+v^2 < 1\}$

$X_2 : U \longrightarrow S^2 \cap V_2, \quad V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z < 0\}$

$X_2(u,v) = (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2})$

$X_3 : U \longrightarrow S^2 \cap V_3, \quad V_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y > 0\}$

$X_3(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$

$X_4 : U \longrightarrow S^2 \cap V_4, \quad V_4 = \{(x,y,z) / y < 0\}$

$X_4(u,v) = (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v)$

$X_5 : U \longrightarrow S^2 \cap V_5, \quad V_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x > 0\}$

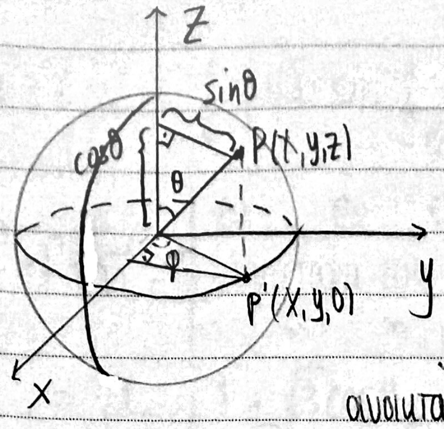
$X_5(u,v) = (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$

$X_6 : U \longrightarrow S^2 \cap V_6, \quad V_6 = \{(x,y,z) / x < 0\}$

$X_6(u,v) = (-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$

$\bigcup_{i=1}^{6} X_i(U) = S^2$

Συμπέρασμα: Η S^2 είναι κανονική επιφάνεια.



$p = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$

$X : U \to S^2 \cap V, \ X(\varphi, \theta) = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$

ανοιχτά $\begin{cases} U = (0, 2\pi) \times (0, \pi) \\ V = \mathbb{R}^3 \setminus C \quad \text{όπου } C = \{(x,y,z) \in S^2 \,/\, x \geq 0, y = 0\} \end{cases}$

$X : U \to S^2 \cap V$ και ομοιομορφισμός

1-1: $X(\varphi_1, \theta_1) = X(\varphi_2, \theta_2) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (\varphi_1, \theta_1) = (\varphi_2, \theta_2)$ (Άσκηση)

$\Rightarrow$ Η X αντιστρέφεται με αντίστροφο $X^{-1} : S^2 \cap V \to U$

$X^{-1}(x,y,z) = (\varphi, \theta) \Leftrightarrow X(\varphi, \theta) = (x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi \sin\theta = x \\ \sin\varphi \sin\theta = y \\ \cos\theta = z \Rightarrow \theta = \arccos z \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \overbrace{\text{ctan}}^{\text{συνεφαπτομένη}}\varphi = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \varphi = \text{arcctan}\dfrac{x}{y}$

$\|X_\varphi \times X_\theta\|^2 = \sin^2\theta > 0$ αφού $\theta \in (0, \pi)$

Επανάληψη

Έστω $c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ λεία

1) Η παράμετρος s το μηκος τόξου

$K(s) = \|\ddot{c}(s)\|$, αν $K(s) > 0$, $\forall s \in I$

τότε: $\left\{ \vec{t}(s) = \dot{c}(s), \ \vec{n} = \dfrac{\ddot{c}(s)}{\|\ddot{c}(s)\|}, \ \vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s) \right\}$

$\tau(s) = \langle \dot{\vec{n}}, \vec{b}(s) \rangle = -\langle \vec{n}(s), \dot{\vec{b}}(s) \rangle = \dfrac{(\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c})}{K^2}$

2) Η παράμετρος $t \in I$ τυχαία:

Η c κανονική αν $\|c'(t)\| > 0$, $\forall t \in I$

$$K=\frac{\|c'\times c''\|}{\|c'\|^3}, \quad \tau=\frac{(c',c'',c''')}{\|c'\times c''\|^2}$$

$$\left\{\vec{t}=\frac{c'}{\|c'\|}, \quad \vec{b}=\frac{c'\times c''}{\|c'\times c''\|}, \quad \vec{u}=\vec{b}\times\vec{t}\right.$$

ΑΣΚΗΣΗ 1: Δίνεται η καμπύλη: $c(t)=(t-\sqrt{3}\sin t,\ 2\cos t,\ \sqrt{3}\,t+\sin t)$, $t\in\mathbb{R}$

i) Εξετάστε αν είναι κανονική. Βρείτε τη συνάρτηση μήκος τόξου με α...

ii) $t_0=0$.

iii) Βρείτε αναπαραμέτρηση με φυσική παράμετρο.
Υπολογίστε καμπυλότητα, στρέψη και τρίεδρο Frenet

ΛΥΣΗ:

i) $c'(t)=(1-\sqrt{3}\cos t,\ -2\sin t,\ \sqrt{3}+\cos t)$

$$\|c'(t)\|=(1-2\sqrt{3}\cos t+3\cos^2 t+4\sin^2 t+3+2\sqrt{3}\cos t+\cos^2 t)^{1/2}$$
$=\sqrt{8}=2\sqrt{2}>0 \Rightarrow$ Η c κανονική

Μήκος τόξου: $s=s(t)=\int_0^t\|c'(\sigma)\|d\sigma=2\sqrt{2}\,t$

ii) $t=t(s)=\frac{s}{2\sqrt{2}}$

$$c(s)=\left(\frac{s}{2\sqrt{2}}-\sqrt{3}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}},\ 2\cos\frac{s}{2\sqrt{2}},\ \sqrt{3}\frac{s}{2\sqrt{2}}+\sin\frac{s}{2\sqrt{2}}\right)$$

iii) $$\vec{t}(s)=\dot{c}(s)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{3}\cos\frac{s}{2\sqrt{2}},\ -2\sin\frac{s}{2\sqrt{2}},\ \sqrt{3}+\cos\frac{s}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$\ddot{c}(s)=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\left(\sqrt{3}\sin\frac{s}{2\sqrt{2}},\ -2\cos\frac{s}{2\sqrt{2}},\ -\sin\frac{s}{2\sqrt{2}}\right)$$

$\Rightarrow \dot{\vec{t}}=\kappa\vec{n}$, $\kappa=\|\ddot{c}\|=\frac{1}{4}$

$\vec{n} = \dfrac{\ddot{c}(s)}{\left(\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sin\dfrac{s}{2\sqrt{2}}, -2\cos\dfrac{s}{2\sqrt{2}}, -\sin\dfrac{s}{2\sqrt{2}}\right)$

$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \text{συντεταγμ. του } \vec{t} & & \\ \text{» » } \vec{n} & & \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 + \sqrt{3}\cos\dfrac{s}{2\sqrt{2}}, 2\cos\dfrac{s}{2\sqrt{2}}, \sqrt{3} - \cos\dfrac{s}{2\sqrt{2}}\right)$

Στρέψη: $\dot{\vec{b}} = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\left(-\sqrt{3}\cos\dfrac{s}{2\sqrt{2}}, -2\sin\dfrac{s}{2\sqrt{2}}, \sin\dfrac{s}{2\sqrt{2}}\right)$

$\tau = -\langle \vec{n}(s), \dot{\vec{b}}(s)\rangle = \dots = \dfrac{1}{4}$

ΑΣΚΗΣΗ: Δίνεται η καμπύλη: $c(t) = (a\cos t, a\sin t, f(t))$, $t \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Να βρεθεί η f ώστε η c να είναι επίπεδη.

ΛΥΣΗ: $c'(t) = (-a\sin t, a\cos t, f'(t)) \neq (0,0,0)$

Άρα, η c κανονική.

$c''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, f''(t))$

$c'''(t) = (a\sin t, -a\cos t, f'''(t))$

$c'(t) \times c''(t) = (a\cos t f''(t) + a\sin t f'(t), a\sin t f''(t) - a\cos t f'(t), a^2) \neq (0,0,0)$

$(c'(t), c''(t), c'''(t)) = \langle c'(t) \times c''(t), c'''(t)\rangle = a^2(f'''(t) + f'(t))$

Η c επίπεδη $\Leftrightarrow \tau = 0$ παντού $\Leftrightarrow f'''(t) + f'(t) = 0$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda$

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$

$f(t) = c_1 1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t$, c_1, c_2, c_3 αυθαίρετες σταθερές

Βασικό σύνολο λύσεων: $\{1, \cos t, \sin t\}$.

$\overset{\cos t}{\underset{\cos(\mathrm{Im}\, i)}{\parallel}}$

ΑΣΚΗΣΗ 3: Δίνεται η $c(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι είναι σταθεράς κλίσης και να βρεθεί σταθερό διάνυσμα το οποίο σχηματίζει σταθερή γωνία με όλες τις εφαπτομένες της c.

$\langle \vec{t}, w \rangle = \cos\varphi$, φ σταθερά και $w \in \mathbb{R}^3$, με $\|w\| = 1$

$\langle \vec{n}, w \rangle = 0 \Rightarrow w = \cos\varphi \vec{t} + \sin\varphi \vec{b}$

$\frac{\tau}{\kappa} = \cot\varphi$

$\kappa > 0$, $\frac{\tau}{\kappa} =$ σταθ.

ΛΥΣΗ:

$c'(t) = 3(1 - t^2, 2t, 1 + t^2) \neq (0,0,0)$.

$c''(t) = 6(-t, 1, t)$

$c'''(t) = 6(-1, 0, 1)$

$\|c'(t) \times c''(t)\| = \dots = 18\sqrt{2}(t^2 + 1) > 0 \Rightarrow \kappa > 0$ παντού

$\kappa(t) = \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3} = \dots = \frac{1}{3(t^2+1)}$

$\tau(t) = \frac{(c', c'', c''')}{\|c' \times c''\|^2} = \dots = \frac{1}{3(t^2+1)}$

$\frac{\tau}{\kappa} = 1 \Rightarrow$ Η c σταθεράς κλίσης, $\frac{\tau}{\kappa} = \cot\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

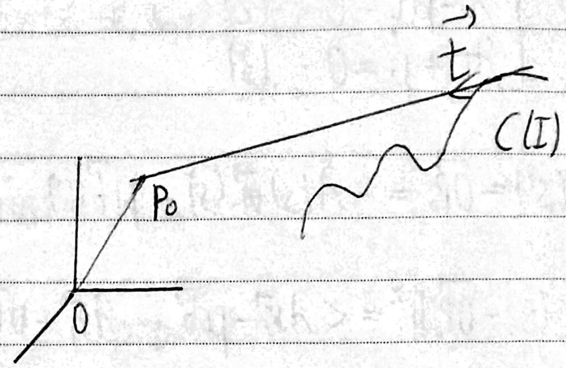
Άρα, το σταθ. $w = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\vec{t} + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\vec{b} = \cdots = (0,0,1)$

$\vec{t} = \dfrac{c'(t)}{\|c'(t)\|} =$

ΑΣΚΗΣΗ 6: Αποδείξτε ότι αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες μιας κανονικής καμπύλης διέρχονται από σταθερό σημείο, τότε η καμπύλη είναι τμήμα ευθείας.

ΛΥΣΗ: Έστω P_0 το κοινό σημείο.

$\vec{OP_0} = c(s) + \lambda(s)\vec{t}(s)$, $\forall s \in I$



$\lambda(s) = \langle \vec{OP_0}, \vec{t}(s)\rangle - \langle c(s), \vec{t}(s)\rangle$ λεία

$\dot{c}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{t}(s) + \lambda(s)\dot{\vec{t}}(s) = 0$

$\Leftrightarrow \vec{t}(s)(1+\dot{\lambda}(s)) + \lambda(s)\cdot k(s)\cdot\vec{n}(s) = 0$, $\forall s \in I$

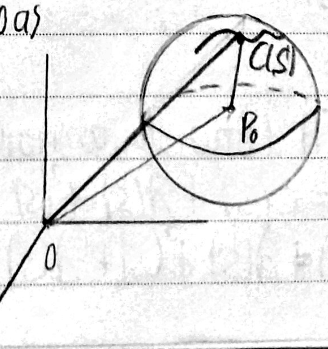
$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\dot{\lambda}(s) = 0 \ (1) \\ \text{και} \\ \lambda(s)\cdot k(s) = 0 \ (2) \end{cases}$$

Η $(1) \Rightarrow \dot{\lambda}(s) = -1 \neq 0$

Από την (2) παίρνουμε $k(s) = 0$ παντού

ΑΣΚΗΣΗ 7: Αποδείξτε ότι αν όλα τα κάθετα επίπεδα μιας κανονικής καμπύλης με καμπυλότητα παντού θετική διέρχονται από σταθερό σημείο, τότε η καμπύλη είναι σφαιρική

$\langle c(s) - \vec{OP_0}, c(s) - \vec{OP_0}\rangle = R^2$, P_0 το κέντρο της σφαίρας, R η ακτίνα



$\langle c(s) - \vec{OP_0}, \dot{c}(s)\rangle = 0 \Rightarrow c(s) - \vec{OP_0} = a\vec{n}(s) + b\vec{b}(s)$

$\left(\begin{array}{l} \langle c(s) - \vec{OP_0}, \ddot{c}(s)\rangle = -1 \\ \ddot{c} = k\vec{n} \end{array}\right)$

ΛΥΣΗ: Έστω P_0 το κοινό σημείο.

$\vec{OP_0} = C(s) + \lambda(s)\vec{n}(s) + \mu(s)\cdot\vec{b}(s), \quad \forall t\in I$

$\dot{c} + \dot{\lambda}\vec{n} + \lambda\dot{\vec{n}} + \dot{\mu}\vec{b} + \mu\dot{\vec{b}} = 0.$

$\Leftrightarrow \vec{t} + \dot{\lambda}\vec{n} + \lambda(-\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}) + \dot{\mu}\vec{b} - \mu\tau\vec{b} = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda\kappa)\vec{t} + (\dot{\lambda} - \mu\tau)\vec{n} + (\lambda\tau + \dot{\mu})\vec{b} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\lambda\kappa = 0 & (1) \\ \dot{\lambda} - \mu\tau = 0 & (2) \\ \lambda\tau + \dot{\mu} = 0 & (3) \end{cases}$$

$C(s) - \vec{OP_0} = -\lambda(s)\vec{n}(s) - \mu\vec{b}(s)$

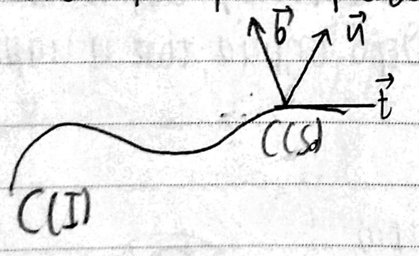
$\|C(s) - \vec{OP_0}\|^2 = \langle \lambda\vec{n} - \mu\vec{b}, \lambda\vec{n} - \mu\vec{b} \rangle = \lambda^2 + \mu^2$

Αρκεί ν.δ.ο. $\lambda^2 + \mu^2 = \sigma\tau\alpha\theta.$

$$\frac{d}{ds}(\lambda^2+\mu^2) = 2(\lambda\dot{\lambda} + \mu\dot{\mu}) \overset{(2),(3)}{=\!=\!=} 2(\lambda\mu\tau + \mu(-\lambda)\tau) = 0$$

Άρα το $\|c(s) - \vec{OP_0}\| = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow$ Η c σφαιρική

ΑΣΚΗΣΗ 8: Αποδείξτε ότι αν όλα τα επίπεδα προσκολλήσεως μιας κανονικής καμπύλης με καμπυλότητα παντού θετική διέρχονται από σταθερό σημείο τότε η καμπύλη είναι επίπεδη.



επίπεδο προσκολλήσεως στο $s_0 \in I$ είναι το επίπεδο που διέρχεται από το $C(s_0)$ και περιέχει τα διανύσματα $\vec{t}(s_0)$ και $\vec{n}(s_0)$

ΛΥΣΗ: Έστω P_0 το κοινό σημείο.

$\vec{OP_0} = c(s) + \lambda(s)\cdot\vec{t}(s) + \mu(s)\cdot\vec{n}(s)$

$\dot{c}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{t}(s) + \lambda(s)\cdot\dot{\vec{t}}(s) + \dot{\mu}(s)\vec{n}(s) + \mu(s)\dot{\vec{n}}(s) = 0$

$\Leftrightarrow \vec{t} + \dot{\lambda}\vec{t} + \lambda\kappa\vec{n} + \dot{\mu}\vec{n} + \mu(-\kappa\vec{t} + \tau\vec{b}) = 0$

$\Leftrightarrow (1+\dot{\lambda}-\kappa\mu)\vec{t} + (\dot{\mu}+\lambda\kappa)\vec{n} + \mu\tau\vec{b} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dot{\lambda}-\kappa\mu = 0 & (1) \\ \dot{\mu}+\lambda\kappa = 0 & (2) \\ \mu\tau = 0 & (3) \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι $\exists s_0 \in I : \tau(s_0) \neq 0$.
Άρα, λόγω συνέχειας, $\exists \varepsilon > 0$, $\tau(s) \neq 0$, $\forall s \in (s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)$

Στο $(s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon)$ θα έχουμε:
Η (3) δίνει $\mu = 0$ παντού. Άρα, η (2) γίνεται $\lambda \cdot \kappa = 0$

Έτσι $\lambda = 0$. Η (1) δίνει $\dot{\lambda}+1 = 0 \Leftrightarrow \dot{\lambda} = -1$, άτοπο. Άρα $\tau = 0$ στο $I \Rightarrow$
Η c επίπεδη.

ΑΣΚΗΣΗ 5: Αποδείξτε ότι οι καμπύλες: $c(t) = (t+\sqrt{3}\sin t, 2\cos t, \sqrt{3}t - \cos t)$
$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, -2t)$, $t \in \mathbb{R}$
είναι γεωμετρικώς ισότιμες.

ΛΥΣΗ: Οι c, γ γεωμ. ισότιμες <u>ανν</u> $\exists$ ισομετρία T του $\mathbb{R}^3$: $c = T \circ \gamma$.

$\|c'(t)\| = 2\sqrt{2} > 0 \Rightarrow s_c = \int_0^t 2\sqrt{2}\, d\sigma = 2\sqrt{2}t$
$\|\gamma'(t)\| = 2\sqrt{2} > 0 \Rightarrow s_\gamma = 2\sqrt{2}t$.

Άρα, $s_c = s_\gamma$ παντού

Αρκεί ν.δ.ο. $\kappa_c = \kappa_\gamma$ και $\tau_c = \pm\tau_\gamma$ παντού. (το δείχνουμε είτε με φυσική είτε με αυθαίρετη παράμετρο)

Σχόλιο: αν $\tau_c = -\tau_\gamma \Rightarrow$ η T αντιστρέφει τον προσανατολισμό του $\mathbb{R}^3$.

$\tau_c = \tau_\gamma = -\frac{1}{4}$ & $\kappa_c = \kappa_\gamma = \frac{1}{4}$